XXXI^{ème} Colloque COPIRELEM

des professeurs et des formateurs de mathématiques
chargés de la formation des maîtres

Actes

Quelles mathématiques
faire vivre à l'école ?
Quels outils pour les maîtres ?

IREM
Instituts de Recherche sur l' Enseignement des Mathématiques

irem Toulouse

LA PROPORTIONNALITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE FRANÇAIS AU 20ÈME SIECLE ET AU DEBUT DU 21EME SIECLE

Magali HERSANT
IUFM des Pays de la Loire et CREN

Résumé :
Considérant le calcul de quatrième proportionnelle comme une tâche représentative de l'enseignement de la proportionnalité dans la scolarité obligatoire, nous étudions l'évolution de la transposition didactique de la proportionnalité depuis 1887 à travers cette tâche. L'analyse de textes officiels et de manuels nous permet de distinguer cinq périodes caractérisées par des savoirs et des savoir-faire. Elle nous permet aussi de montrer en quoi la transposition didactique actuelle de la proportionnalité est héritière des transpositions didactiques passées

Dans l'enseignement de la proportionnalité, le calcul de la quatrième proportionnelle est une tâche classique et emblématique. C'est pourquoi nous proposons une étude de l'évolution de la transposition didactique (Chevallard, 1985) de la proportionnalité directe dans l'enseignement obligatoire français (1887-2000) à partir de l'évolution des savoirs et savoir-faire (Bosch, Chevallard, 1999) relatifs à cette tâche. Pour cela, nous utilisons deux sources : des textes officiels (programmes, instructions et répartitions des programmes) et des manuels. L'études des textes officiels permet de cerner les positions institutionnelles et de délimiter des périodes de stabilité pour l'enseignement de la proportionnalité ; celle des manuels rend compte d'une certaine réalité de l'enseignement de la proportionnalité et précise l'activité de la noosphère pour rendre ou maintenir cohérentes les organisations mathématiques locales. L'analyse de ces sources nous conduit à délimiter et caractériser cinq périodes dans l'enseignement de la proportionnalité.

Ces cinq périodes sont présentées après des précisions permettant de cerner les limites de notre travail. En conclusion, nous essayons de montrer en quoi la transposition didactique actuelle est héritière des transpositions didactiques passées.

PRÉCISIONS

Enseignement obligatoire

Depuis 1887, la durée de la scolarité obligatoire s'est accrue progressivement et l'organisation en « niveaux » a été modifiée. Jusqu'en 1959[1] l'enseignement obligatoire était morcelé, et le « collège unique » n'existe que depuis la réforme Haby (1975)[2]. Pour

[1] Plan Berthouin, réforme des collèges et des lycées, obligation scolaire prolongée jusqu'à 16 ans.
[2] Cette réforme institue un tronc commun de formation, de l'école primaire à la sortie du collège.

cette étude nous avons considéré les niveaux suivants qui correspondent à la scolarité de la majorité de la population :

- de 1887 à 1941 : classes du primaire (de 6 à 11 ans, jusqu'au CM[3]) et CS[3] (11-13 ans) ou classe de Fin d'études Primaires (11-14 ans) [4] ;
- de 1941 à 1960 : classes du premier cycle du primaire (6-11 ans, jusqu'au CM) et du primaire supérieur ou second cycle (11-14 ans)[5];
- de 1960 à 1977 (application de la réforme Haby) : classes de primaire (6-11 ans) et des collèges d'enseignement général (CEG);
- depuis 1977 : classes de primaire et de collège.

Proportionnalité

Le terme proportionnalité employé dans l'enseignement actuel fait référence à un champ de problèmes issus de la vie sociale et de situations physiques dans lesquelles des grandeurs proportionnelles interviennent. La proportionnalité n'a pas toujours été un objet d'enseignement. Le terme n'apparaît dans les programmes du primaire qu'en 1970. Au début du siècle, on enseignait les grandeurs proportionnelles. Pour nous, le mot proportionnalité recouvre les notions de grandeurs proportionnelles, suites numériques proportionnelles, application linéaire et proportionnalité.

Calcul de quatrième proportionnelle

La tâche que nous considérons est le calcul de quatrième proportionnelle, quel que soit le cadre (Douady, 1986) et le registre de représentation du problème (Duval, 1995). Ainsi les problèmes suivants relèvent du calcul de quatrième proportionnelle :

Etoffe[6] : 18 mètres d'étoffe ont coûté 189 fr. Combien 13 mètres coûteront-ils ?

Carburant : Une voiture consomme en moyenne 8 l de carburant aux 100 km. Compléter le tableau suivant.

Distance (km)	25	1	c	d
Carburant (l)	a	b	10	1

1887-1923 : GRANDEURS QUI VARIENT DANS LE MÊME RAPPORT, PROBLÈMES DE RÈGLE DE TROIS ET TECHNIQUE DE RÉDUCTION À L'UNITÉ.

A cette époque, l'école prépare les enfants à leur vie professionnelle future. L'enseignement de la proportionnalité se fait dès le CM2 à partir de l'étude des grandeurs proportionnelles et des problèmes de règle de trois.

---

[3] CM : Cours moyen ; CS : Cours Supérieur

[4] La réforme de 1931 étend la scolarité obligatoire jusqu'à 14 ans, elle est mise en place à partir de 1938. Jusqu'en 1938, les élèves préparent le Certificat d'études primaires en CM. A partir de 1938, la scolarité est obligatoire jusqu'à 14 ans, le Certificat d'études primaires est alors préparé en classe de fin d'études ou au CS. Les CS n'existent que dans les écoles de plus de cinq classes.

[5] Les élèves préparent le diplôme d'études préparatoires au CM. A l'issue du CM, il est possible d'accéder, sur concours, au collège dont les programmes sont unifiés avec ceux de l'enseignement primaire supérieur (E.P.S.)

[6] extrait de F.F., CM, 1904, p. 196

La théorie de référence est celle des proportions, mais les programmes ne prévoient pas de l'enseigner explicitement. La technique institutionnelle est la technique de réduction à l'unité :

> Problème : 18 mètres d'étoffe ont coûté 189 fr. Combien 13 mètres coûteront-ils ?
>
> Si 18 mètres coûtent 189 fr.
>
> 1 mètre coûtera 18 fois moins, ou $\frac{189}{18}$
>
> et 13 mètres coûteront 13 fois plus qu'un mètre ou $\frac{189 \times 13}{18}$
>
> d'où $x = \frac{189 \times 13}{18} = 136$ fr 50
>
> (F.F., CM, 1904, p 196-197)

Mais dans les manuels, les choix restent fortement marqués par les problématiques de la théorie des proportions. Cela se traduit de deux façons. D'abord, les techniques des rapports ou proportions[7] restent utilisées dans certains manuels (cf. annexe 1). De plus, des auteurs refusent d'utiliser des rapports de grandeurs de nature différente (c'est nous qui soulignons) :

> **497.** - Les raisonnements précédents ne conviennent évidemment que pour des proportions de nombres. Voici un raisonnement qui s'applique aux proportions de <u>quatre grandeurs de même espèce.</u>
> **Théorème. -** Étant donnée une proportion de **quatre grandeurs de même espèce**, on en obtient une autre : soit en permutant les extrêmes, soit en permutant les moyens, soit en mettant les extrêmes à la place des moyens et réciproquement. (p 293)
>
> **501**. Propriété. – Théorème. – Quand deux grandeurs **de même espèce** sont directement proportionnelles le rapport d'une valeur **quelconque** de la 1ère à la valeur correspondante de la 2ème est un **nombre invariable**. (p 299)
>
> **502**. – Si les grandeurs directement proportionnelles ne sont pas de même espèce, le raisonnement du numéro 501 est en défaut, puisqu'il est impossible de permuter les moyens de la proportion ; l'écriture nouvelle n'aurait aucun sens.
>
> **(Beil, Vareil CS, 1909, p 288-299)**

[7] La technique des rapports utilise le fait que les grandeurs varient dans le même rapport. Ainsi le problème précédent serait résolu de la façon suivante : La longueur d'étoffe et le prix de cette étoffe varient dans le même rapport, donc : $x = 189 \times \frac{13}{18}$. La technique des proportions utilise le fait que les valeurs des grandeurs proportionnelles forment une proportion et la propriété : “ dans une proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ”. avec cette technique le problème précédent se résout ainsi : 18 mètres est à 13 mètres comme 189 est à x donc : $\frac{18}{13} = \frac{189}{x}$ et $x = \frac{189 \times 13}{18}$.

1923-1945 : LA MÉTHODE DE RÉDUCTION À L'UNITÉ CONTESTÉE, VERS LE COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITÉ ?

Cette période voit de nombreux changements de programme à tous les niveaux d'enseignement. Pour la proportionnalité, c'est une période de transition qui marque le début de changements importants.

Dans les textes officiels (programmes de 1923 pour le CM et 1931 pour le CS) la proportionnalité n'est plus seulement envisagée comme une convention sociale (problèmes de commerce), mais aussi comme un outil de modélisation de phénomènes physiques (introduction de problèmes de mouvement uniforme, densité, échelle dans le champ des problèmes de proportionnalité, étude de nombreuses grandeurs et calculs de mesures de grandeurs avec des formules). Ainsi la notion de valeur de l'unité apparaît implicitement au CS à travers par exemple les notions de poids spécifique, prix d'une marchandise et quantité de marchandise correspondant à une unité de monnaie. Les changements de programmes ultérieurs confirment et accentuent cette tendance.

Dans les manuels, il y a globalement une prise de distance par rapport à la théorie des proportions qui se traduit par une moindre utilisation de la technique des proportions. Parallèlement, la technique de réduction à l'unité est ouvertement contestée et la technique du coefficient commence à apparaître au CS.

> **140**. - La **méthode de réduction à l'unité** est d'un *emploi facile* ; mais, si on l'applique machinalement, elle peut conduire à des *raisonnements trop longs* ou même *absurdes*. (...)
> *Gay et Mortreux, CEP-CS (1933)*

Cependant le changement de technique amorcé n'est pas encore accompagné dans les manuels d'une modification conséquente au niveau de l'étude des propriétés des grandeurs proportionnelles.

Par ailleurs, nous notons deux freins possibles à l'emploi massif de la technique du coefficient. La technique n'est pas " automatisable ", contrairement à la technique de réduction à l'unité (selon le coefficient choisi on fait une division ou une multiplication). De plus, elle n'est pas valable pour les grandeurs inversement proportionnelles, étudiées en même temps que les grandeurs directement proportionnelles à l'époque.

1945-1970 : UTILISATION DE LA VALEUR UNITAIRE ET ALGÉBRISATION DES TECHNIQUES

Enseignement primaire

Entre 1945 et 1947, il y a une réorganisation de l'enseignement primaire élémentaire. Les instructions pour le CM institutionnalisent la valeur de l'unité et précisent les rapports du coefficient de proportionnalité avec la règle de trois, les pourcentages et les fractions :

> Le programme comprend explicitement l'étude du prix et du poids à l'unité et des exemples analogues de quotients qui peuvent être compris dans la dénomination générale de " valeur de l'unité ". [...] Leur calcul et leur emploi sont résumés dans la formule :
> Valeur totale = valeur de l'unité × nombre d'unités.
> Cette formule donne la règle de calcul, soit du premier nombre par une multiplication, soit de l'un des termes du deuxième membre par une division.

> (...) Les problèmes usuels de règle de trois conduisent à la recherche d'un quotient intermédiaire qui peut être, soit la valeur d'une unité, soit un nombre d'unités.
> Les formules suivantes en donnent deux exemples typiques :
>
> $$\frac{\text{valeur de la première parcelle}}{\text{surface de la première parcelle}} = \text{prix unitaire}$$
>
> $$\text{prix de l'hectolitre} = \frac{\text{valeur totale}}{\text{nombre d'hectolitres}}$$
>
> Des exemples simples de quotient permettent, de même, de justifier sommairement les diverses modes de calcul des problèmes de règles de trois :
>
> $$\frac{a \times b}{c} \;;\; a \times \frac{b}{c} \;;\; \frac{a}{c} \times b$$
>
> ainsi que des procédés de vérification (division par un même nombre d'un des facteurs et du diviseur).

Ces modifications permettent l'algébrisation des techniques de calcul de quatrième proportionnelle et préservent dans une certaine mesure la référence aux grandeurs proportionnelles. Cependant, dans les manuels du primaire, nous relevons deux choses qui conduisent à un travail plus sur les mesures de grandeurs que sur les grandeurs :

– la technique de réduction à l'unité continue d'être employée, mais le petit discours technologique qui l'accompagnait jusque là tend à être remplacé par différents ostensifs ;

– une “ nouvelle ” technique de calcul de quatrième proportionnelle apparaît dans un manuel (Piète-Sciulara-Berthoul, CM CS 8ème et 7ème , 1962) : le produit en croix désigné par « la règle de trois ». Les auteurs n'abordent pas l'étude des grandeurs inversement proportionnelles et proposent de disposer les données d'un problème de quatrième proportionnelle dans un tableau à quatre cases avec un point d'interrogation pour désigner la valeur cherchée. Ils tracent ensuite une croix reliant les quatre mesures et énoncent la règle suivante : « Pour trouver la réponse, il faut multiplier les deux nombres connus d'une branche de la croix et diviser le produit obtenu par le nombre connu isolé de l'autre branche » (cf. extrait en annexe 2).

Enseignement secondaire

Avec la fusion des filières “ courte ” et “ longue ” en 1959-1960, les programmes du collège changent : les problèmes de règle de trois et l'étude des grandeurs proportionnelles disparaissent de l'enseignement à ce niveau.

Ces modifications se traduisent dans les manuels par des points de vue rétrogrades ou avant-gardistes. Ainsi, le Cluzel-Court (3ème, 1963) traite de grandeurs proportionnelles, étudie les rapports, proportions et nombres proportionnels et emploie la technique des proportions ; au contraire le Queysanne-Revuz (3ème, 1968) n'aborde pas les grandeurs proportionnelles, associe les rapports et proportions à la fonction linéaire et aux suites numériques proportionnelles et ne propose que des exercices de partages proportionnels.

1970-1977 : LA PROPORTIONNALITÉ, RELATION MULTIPLICATIVE ENTRE DEUX LISTES DE NOMBRES.

La réforme des mathématiques modernes accélère l'évolution de l'enseignement de la proportionnalité. Les principales modifications concernent les savoirs à enseigner.

Le terme proportionnalité apparaît pour la première fois dans les programmes du primaire où il est défini de la façon suivante :

> Lorsque l'opérateur est " multiplier par ... " ou " diviser par ... " la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la *proportionnalité.*
>
> Instructions CM 1970

Par contre, la proportionnalité disparaît de l'enseignement secondaire.

L'application linéaire devient la théorie institutionnelle et l'étude des grandeurs proportionnelles est abandonnée. Le tableau devient l'outil institutionnel de résolution des problèmes de proportionnalité :

> La plupart des problèmes traités au cours moyen mettent en œuvre des problèmes dans lesquels la proportionnalité doit être explicitée.
> D'une façon générale, tous les problèmes traités au moyen de la " règle de trois " relèvent du modèle mathématique précédent. Il est essentiel de savoir qu'il s'agit d'un seul et même problème, qu'il convient d'expliquer en termes nouveaux.
>
> *Exemple 1* : Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles.
> Un enfant a utilisé 45 perles pour faire trois colliers.
> Le tableau ci-contre permet de répondre aux deux questions :
> Combien faut-il de perles pour fabriquer 7 colliers ?
> Combien de colliers peut-on fabriquer avec 135 perles ?

Collier	Perles
3	45
7	?
?	135

> Programmes de 1970, CM

Par ailleurs, la technique du coefficient est abondamment utilisée dans les manuels. Elle est souvent accompagnée d'autres techniques (produit en croix ou techniques basées sur la linéarité).

Ces modifications concernant l'enseignement de la proportionnalité et celui des grandeurs engendrent deux glissements potentiels :

– la confusion entre situation multiplicative et situation de proportionnalité. En effet, tous les problèmes qui se représentent dans un tableau avec un coefficient multiplicatif ne sont pas des problèmes de proportionnalité. Certains sont seulement des problèmes de division euclidienne, comme le problème Colliers[8].

– le tableau de proportionnalité devient objet d'enseignement.

[8] Il y a bien un opérateur multiplicatif qui permet de passer du nombre de colliers au nombre de perles mais cet opérateur n'admet pas d'opérateur réciproque : avec 46 perles combien de colliers peut-on construire ? C'est la difficulté de la modélisation d'une situation faisant intervenir des valeurs discrètes.

DEPUIS 1978 : UN RETOUR AUX SITUATIONS, LES SUITES NUMÉRIQUES FINIES

Depuis 1978, le retour à l'étude de situations « concrètes » induit implicitement un retour à la notion de grandeurs proportionnelles. Pour autant, on ne travaille plus vraiment sur les grandeurs proportionnelles mais plutôt sur les suites de mesures de grandeurs proportionnelles, comme on le voit en particulier avec l'usage des tableaux qui n'est possible que si l'on distingue les grandeurs en jeu mais qui conduit plus à l'utilisation de l'expression « tableau de proportionnalité » qu'à celle de « grandeur proportionnelle ». De plus, la proportionnalité est envisagée différemment puisque la tâche de reconnaissance de situations de proportionnalité à partir de différentes représentations sémiotiques s'est développée durant la période, avec les imprécisions possibles pour ce qui concerne le registre tableau. Cette organisation permet de donner un rôle moindre au tableau de proportionnalité, d'accorder plus de place à la représentation graphique de la proportionnalité et aussi de ne pas institutionnaliser dans les programmes une technique particulière. Avec cette organisation, les élèves utilisent entre le CM et la 4ème/3ème (selon les programmes) des techniques relatives au calcul de quatrième proportionnelle justifiées par des propriétés de l'application linéaire, outil implicite jusqu'en 4ème/3ème, selon les programmes.
Le retour aux situations et l'utilisation implicite de la théorie de l'application linéaire entraînent quelquefois la cohabitation des deux théories de référence, notamment au niveau de la génération de techniques, et ce que Comin (Comin, 2002) nomme une hétérogénéité épistémologique. Ainsi, le produit en croix qui était justifié facilement autrefois au niveau du primaire dans le cadre de la théorie des proportions est toujours utilisé à ce même niveau actuellement sans pouvoir être réellement justifiée. De plus, certains mots ou expressions ont perdu une partie de leur sens et peuvent être utilisés à mauvais escient[9].

CONCLUSION

Au-delà de la caractérisation de cinq périodes dans l'enseignement de la proportionnalité, nous avons cherché à montrer comment la transposition didactique de la proportionnalité a évolué progressivement, sans véritable rupture avant 1970, et le plus souvent avec des mouvements avant-gardistes et rétrogrades à chacune des époques.
Cette évolution s'est réalisée sous la pression de contraintes de nature différente. Avant la période 1945-1969, la discussion nous apparaît essentiellement liée à la difficulté de faire cohabiter une utilisation rigoureuse de la théorie des proportions et un enseignement court à visée essentiellement professionnelle. Puis, l'allongement de la scolarité, la modification des besoins en termes de formation et probablement l'influence naissante de Bourbaki et de Piaget entraînent une algébrisation de la proportionnalité et une avancée assez nette vers un changement de modèle. La réorganisation des mathématiques modernes conduit à l'abandon des grandeurs dans le traitement de la proportionnalité et au tout tableau, avec des dérives possibles. Enfin, la prise en compte de résultats de recherche, en didactique des mathématiques notamment, ont vraisemblablement contribué à la transposition didactique actuelle.

L'étude met en évidence une ouverture progressive du champ des techniques utilisables pour le calcul de quatrième proportionnelle. Aujourd'hui, il n'y a pas vraiment de

[9] Ainsi le mot « proportion » était utilisé avec le sens de rapport dans les projets de programmes de collège en 2004.

technique institutionnelle et l'on privilégie les raisonnements personnels. Cela apparaît comme une évolution positive de l'enseignement mais pose aussi des questions : dans le contexte actuel où enseignants et élèves ont moins de repères par rapport aux théories mathématiques en jeu, au vocabulaire et à la notion de grandeur (Comin, 2002) ne risque-t-on pas d'entraîner des conceptions erronées? Par ailleurs, l'utilisation actuelle de l'application linéaire comme outil implicite puis outil explicite apparaît *a priori* favorable à l'apprentissage. Cependant, n'est-il pas plus difficile pour les élèves de faire le lien entre proportionnalité et application linéaire ?

REFERENCES

Boisnard, Houdebine, Julo, Kerboeuf, Merri, 1994, *La proportionnalité et ses problèmes*, Ed. Hachette Education

Bosch, Chevallard, 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, objets d'étude problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 19.1*

Chevallard, 1985, *La transposition didactique*, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

Comin, 2002, L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège, *Recherche en didactique des mathématiques 22 2-3*, pp. 135-181, Ed. La Pensée Sauvage

Comin, 2003, Des souris et des graines, *Grand N n°72*, pp. 41-73, Ed. IREM de Grenoble

Dahan-Dalmedico, Peiffer, 1995, Une histoire des mathématiques, routes et dédales, Ed. Point Sciences

Douady, 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques 7.2*, pp. 5-31, Ed. La Pensée Sauvage

Duval, 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Ed. Peter Lang

Hersant, 2001, *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*, Thèse de l'Université Paris 7.

Hersant, 2005, La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire, *Repères IREM n°59*, à paraître

Pluvinage, Dupuis, 1981, La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques 2.2*, pp. 165-212, Ed. La Pensée Sauvage

Vergnaud, 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques 10 2-3*, pp. 133-170

Annexe 1 : Analyse des manuels

Pour cette étude nous avons utilisé des manuels de différentes époques. Nous n'avons pas cherché à savoir s'ils étaient représentatifs, mais ils témoignent d'une façon de présenter la proportionnalité à un moment donné. Leur analyse, présentée ci-dessous, est obtenue de la façon suivante.

La *théorie de référence* est la théorie mathématique utilisée implicitement ou explicitement dans le manuel. Pour la proportionnalité, deux théories peuvent être employées : la théorie des proportions, notée P, ou la théorie de l'application linéaire, notée A. Si la théorie est expliquée dans le manuel, elle notée PE ou AE dans le tableau.

Si elle est implicite elle est notée PI ou AI. Les deux théories peuvent être utilisées dans le même manuel, dans ce cas, nous l'indiquons.
Nous indiquons dans la colonne « *proportionnalité entre* » si les propriétés et définitions données dans le manuel le sont pour des grandeurs proportionnelles, des suites de nombres proportionnelles i.e. des suites de mesures de grandeurs proportionnelles ou encore des nombres proportionnels qui ne sont pas des mesures de grandeurs proportionnelles.
La propriété utilisée pour définir la proportionnalité est indiquée dans la colonne « *définition issue de* ». Les propriétés énoncées au sujet de la proportionnalité dans le manuel sont indiquées dans la colonne « *propriétés énoncées* ». Les numéros correspondent aux propriétés suivantes :

Théorie des proportions (rapports, proportions, extrêmes, moyens)	Théorie de l'application linéaire (application, fonction, image, antécédents)
Soit I un sous-ensemble fini de N, les suites numériques $(u_i)_{i\in N}$ et $(v_i)_{i\in N}$ de termes non nuls sont proportionnelles, si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :	*f est une fonction définie de R dans R. Soit I un sous-ensemble fini de N, les suites numériques $(u_i)_{i\in N}$ et $(v_i)_{i\in N}$ sont proportionnelles si l'une des conditions suivante est vérifiée :*
1. Pour tout *i* et *j* de I, $\frac{u_i}{u_j}=\frac{v_i}{v_j}$, (les suites varient dans le même rapport)	
2. a) pour tout *i* de I, si u_i est multiplié par 2, 3, 4... λ (λ réel), v_i est multiplié par 2, 3, 4… λ. 2. b) pour tous *i, j, k* de I, si $u_i = u_j + u_k$ alors $v_i = v_j + v_k$.	8. a) pour tout entier *i et j* de I si le réel λ est tel que $u_i = \lambda u_j$ alors $v_i= f(u_i) = \lambda f(u_j) = \lambda v_j$ 8. b) pour tout entier *i, j, k* de I si $u_i = u_j + u_k$ alors $v_i= f(u_i) = f(u_j) + f(u_k) = v_j + v_k$
3. Pour tout *i* et *j* de I, $u_iv_j = v_iu_j$ (le produit des extrêmes est égal au produit des moyens)	
4. Pour tout *i* et *j* de I, $\frac{u_i}{v_i}=\frac{u_j}{v_j}$	
5. Pour tout *i, j, k* de I, si λ et µ sont des réels non tous les deux nuls tels que $u_i = \lambda u_j + \mu u_k$ alors $\frac{u_i}{v_i}=\frac{\lambda u_j+\mu u_k}{\lambda v_j+\mu v_k}$	8. (a et b) pour tout entier *i, j, k* de I si les réels λ et µ sont tels que $u_i = \lambda u_j +\mu u_k$ alors $v_i= f(u_i) = \lambda f(u_j) + \mu f(u_k) = \lambda v_j + \mu v_k$ 8*. toute combinaison linéaire des deux colonnes du tableau est une nouvelle colonne du tableau
6. $\frac{u_i}{v_i}$ est un coefficient de proportionnalité, c'est le nombre par lequel il faut multiplier u_i pour obtenir v_i.	7. Pour tout *i* de I, v_i est l'image de u_i par une application linéaire *f*, c'est-à-dire il existe un réel non nul α tel que pour tout entier $i\in$ N, $v_i = \alpha u_i$ 7*. il existe un opérateur multiplicatif qui permet de passer d'une ligne à l'autre du tableau
	9. Dans un repère l'ensemble des points $(u_i, v_i)_{i\in I}$ est sur une droite passant par l'origine du repère.

Enfin, les techniques proposées dans le manuel sont indiquées dans la dernière colonne, avec les abréviations suivantes :

- τ_u : technique de réduction à l'unité
- τ_r : technique de multiplication par un rapport
- τ_p : technique des proportions
- τ_x (τ_x*) : technique du produit en croix (dans le registre tableau)
- τ_c (τ_c*) : technique du coefficient (dans le registre tableau)
- τ_l (τ_l*): technique utilisant des propriétés de linéarité (dans le registre tableau)
- τ_g : technique graphique

Date	Niveau	Auteurs	Théorie de référence	Proportionnalité entre	Définition issue de	Propriétés énoncées	Techniques proposées
Avant 1887							
1884	CM CEP	ED BELIN	PI	Grandeurs	5		τ_u
1886	CM	PLUSIEURS PROFS	PE	Grandeurs	5		τ_u τ_r
Première période 1887-1923							
1904	CM CEP	BARREAU LALARGE	PI	Grandeurs			τ_u
1904	CM	FF	PE	Grandeurs	5		τ_u
1920	CM	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
	CS	FEC	PE	Grandeurs	5		τ_u τ_r τ_p
1903	CS	LEYSENNE	PE	Grandeurs	5		
1909	CS	BEHR VAREIL	PE	Grandeurs	3	1 5	τ_p τ_r
Seconde période 1923- 1945							
1923	CE CM	LEMOINE	PI	Grandeurs			τ_u
1923	CM CEP	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1931	CEP CS	MARTIN REAU	PI	Grandeurs	5	1	τ_u
1933	CEP CS	MORTREUX	PI	Grandeurs	5		
1923	CS	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1932	CS	ROYER COURT	PE	Grandeurs	5	3	τ_u τ_p τ_r
1935	CM CEP	CROISILLE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1943	EPS	PLUGIBET	PI	Grandeurs	5		τ_u τ_c
1939	EPS/5-4-3	FOULON	PE	Grandeurs	3	1 5 9	τ_g
Troisième période 1945-1969							
1946	CM CS 7	MARIJON MASSERON DELAUNAY	PI	Grandeurs	5		τ_u
1950	CM2 CS	CROISILLE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1950	CM	DRAUX	PI	Grandeurs			τ_u
1959	CM	DS (Commission d'instituteurs)	PE	Grandeurs	5		
1962	CM CS 8^E 7^E	PIETE SCIULARA BERTHOUL	PI	Grandeurs	5		τ_x* τ_c
1965	CM	ADAM - GOUZOU	PI	Grandeurs			
1969	CM2	NADAUD BENHAIM	PI	Grandeurs			τ_u τ_r
1958	6 CC	MARVILET		Grandeurs			

1959	CC BE	MARIJON PEQUINIOT	PE	Grandeurs	6 3	5 4 7 9	τ_p τ_c τ_g
1965	6	HUISMAN ITARD	AI	Grandeurs	4		τ_c
1965	6	QUEYSANNE REVUZ	AI	Suites numériques	4	7	τ_c τ_g
1963	6	MONGE GUINCHAN	AI	Suites numériques	4		τ_c
1963	5-4-3	CLUZEL COURT	PE	Grandeurs	5	1 2 4	τ_p
1963	3	CHILLOUX MALLET	PE	Grandeurs	4	1 6 7	τ_p
1960	3	LEBOSSE HEMRY	PE	Grandeurs	5	4 6	τ_c τ_g
1968	3	QUEYSANNE REVUZ	AE				
1968	3	MONGE GUINCHAN	AE		4		
Quatrième période 1969-1977							
1969	6ÈME	QUEYSANNE REVUZ	AE				
1977	6ÈME	QUEYSANNE REVUZ	AE				
1973	CM2	ADAM NICOLAS GOUZOU	AI	Nombres	7*	5* 8*	τ_l*
1970	CM	DENISE THEVENON JOLY	AI	Grandeurs Nombres		5* 7*	τ_l* τ_c*
1971	CM	GOERGLER ANDRIEU VIALA	AI	Nombres		7* 5* 8*	τ_l* τ_c*
1977	CM2	GOERGLER ANDRIEU VIALA	AI	Nombres		7* 5* 8*9*	τ_l* τ_c*
1970	CM	THIRIOUX GASPARI MIREBEAU LEYRAT	AI	Nombres		5* 7* 8* 2*	τ_c*
1976	CM	THIRIOUX GASPARI MIREBEAU LEYRAT	AI	Nombres		5* 7* 8* 2*	τ_l^* τ_c^* τ_x^*
Cinquième période 1977-2000							
1980	CM	THIRIOUX ET AL.	AI	Nombres			τ_c^*
1984	CM	DENISE THEVENON	AI	Nombres		7* 5* 8*	τ_l* τ_c*
1988	CM	BIA MARECHAL CLAVIER	AE	Suites numériques		8 7 9	τ_l^* τ_c^* τ_g
1996	CM	BIA MARECHAL PELTIER	PI	Suites numériques		7* 8* 9	τ_l^* τ_c^* τ_g
1977	6	MAUGUIN	AI	Suites numériques	7	8	τ_c τ_u τ_l τ_g
1981	6	THIRIOUX L ET S SANCHEZ DOMAIN	AI	Nombres	7*	5* 8* 2*	τ_l^* τ_c^* τ_x^*
1987	5	JULIEN PENNINCKX	AI/PI	Suites numériques		1 3 4 7	τ_l^* τ_c τ_u τ_p τ_x^*
1987	5	BAREIL ZEHREN	AI	Suites numériques		8 7 9	τ_l τ_c τ_g τ_u
1989	3	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Grandeurs		7	τ_c τ_l
1990	6	DELORD TERRACHER VINRICH	AI/PI	Grandeurs		1 5* 7* 9	τ_c^* τ_l^* τ_g
1991	5	DELORD TERRACHER VINRICH	AI/PI	Grandeurs		5* 7* 9	τ_l^* τ_c^* τ_x^*
1992	4	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Suites numériques		7 8 9	τ_c τ_g
1993	3	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Suites numériques		7 9	τ_c $\tau_g\tau_l$
1996	6	DELORD VINRICH	AI	Nombres		5* 7* 9	τ_c* τ_g^* τ_l^*
1997	5	DELORD VINRICH	AI/PI	Nombres		5* 7* 9	τ_x^* τ_c
1998	4	DELORD VINRICH	AI/PI	Nombres		1 7* 9	τ_c^* τ_g τ_l^* τ_p

Annexe 2 : extrait du Piète – Sciulara – Berthoul, CM CS 8ème, 7ème, 1962

Reprenons le Problème II (page 98). Le commerçant a établi un tableau de vente. Comme la réponse est obtenue en effectuant $\frac{3\times 20}{15}$, il cherche

Longueur en m	*Prix en F*
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45

un moyen rapide pour placer convenablement les 3 nombres : 3, 20, 15 qui sont soulignés dans le tableau de vente.

Dans un tableau réduit, il inscrit ces nombres à leur place. A l'endroit où doit se trouver la réponse, il met un point d'interrogation. Il trace une croix et il remarque que :

Longueur en m	*Prix en F*
3	15
?	20

Longueur en m	*Prix en F*
3	17
7,5	?

Pour trouver la réponse, il faut multiplier les 2 nombres connus d'une branche de la croix et diviser le produit obtenu par le nombre connu isolé de l'autre branche.

$$? = \frac{3 \times 20}{15}.$$

Avec ce procédé, sans tableau de vente, il peut ainsi trouver immédiatement les calculs qu'il faut effectuer pour trouver la réponse du Problème III (page 98).

$$? = \frac{17 \times 7,5}{3} = 42,5.$$

Ce procédé est appelé règle de trois.

Lorsqu'on connaît 3 nombres de 2 lignes d'un tableau de grandeurs proportionnelles, on peut calculer le quatrième par la règle de trois.