Thèse. Bernard Vitrac, « De quelques questions touchant au traitement de la proportionnalité dans les Eléments d'Euclide »

M Maurice Caveing

Thèse.
Bernard Vitrac,
« De quelques questions touchant au traitement de la proportionnalité dans *Les Eléments* d'Euclide » (*)

Pour étonnant que cela puisse paraître, on n'en doit pas moins remarquer que la notion de proportionnalité dans les mathématiques anciennes n'avait pas fait l'objet jusqu'à ce jour d'une étude d'ensemble. Elle a pourtant été jusqu'au XVIIe siècle l'un des principaux outils de la pensée des « géomètres », avant de céder la place aux méthodes modernes. Récemment cependant un sujet de débats s'est répandu parmi les historiens, celui de la « théorie des proportions » — terminologie empruntée bizarrement aux traducteurs latins médiévaux — identifiée dans Euclide. Il s'agit le plus fréquemment de controverses qui se fondent sur un examen partiel des textes, par exemple les définitions du Livre V des *Eléments*. Il importait donc d'étudier de façon systématique le traitement que les grands textes mathématiques disponibles donnent de la proportionnalité.

La thèse de Bernard Vitrac y contribue grandement. On notera que seule une connaissance approfondie du texte d'Euclide pouvait autoriser pareille ambition et que l'auteur l'avait acquise en traduisant auparavant l'ensemble du traité (1). Il ne pouvait cependant être question d'étendre d'emblée l'enquête aux œuvres d'Archimède ou d'Apollonius. D'autres textes, dont la traduction est jointe en annexe, ont néanmoins permis de vérifier à l'extérieur des *Eléments* des résultats acquis par leur examen interne; ce sont *Les Données* et *La Division du Canon* d'Euclide, les *Définitions* de Héron, des passages significatifs de Pappus et de Théon d'Alexandrie dans leurs *Commentaires à l'Almageste,* ainsi que de Théon de Smyrne.

(*) Thèse préparée sous la direction de M. le Professeur Jean Dhombres et soutenue le 17 décembre 1993 à l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, en histoire et épistémologie des sciences.

(1) Cette traduction commentée est, comme on sait, en cours de publication : Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments*, traduits du texte de Heiberg (Paris : PUF), « Bibliothèque d'Histoire des Sciences » : vol. I : Introduction générale par Maurice Caveing, Livres I-IV : Géométrie plane, traduction et commentaire par Bernard Vitrac (1990); vol. II : Livres V-IX : Proportions et similitude, Arithmétique, traduction et commentaire par Bernard Vitrac (1994); vol. III et IV : en préparation.

Le but final est d'éclaircir les difficultés, réelles ou supposées, qui ont arrêté les commentateurs, anciens ou récents. Mais avant d'en dresser la liste, l'auteur fixe nettement ses principes de méthode. On privilégiera comme point de départ l'analyse technique du texte lui-même et l'examen intertextuel, avec recension complète des occurrences où apparaît un mode de traitement mathématique spécifié de la matière, sans oublier les usages langagiers et autres indices significatifs. On pratiquera d'autre part un doute méthodique à l'égard des sources externes, qu'il s'agisse de la tradition doxographique ou des commentaires à caractère ou à finalité philosophiques. A ces deux règles, qui permettront d'éviter notamment toute émendation hâtive, s'ajoutent des précautions quant au type de résultat cherché; l'histoire de la mathématique grecque est en effet constamment menacée de deux déformations. L'une provient de l'usage abusif des « reconstructions historiques » : il s'agit d'hypothèses faites à propos des périodes mal documentées, qui ne sont sauvées des faits qui les infirment que par d'autres hypothèses surajoutées *ad hoc* jusqu'à ce que cette accumulation aboutisse au rejet d'un texte comme inauthentique parce que ne s'accordant pas avec la « reconstruction ». Il est clair que la saine méthode consiste au contraire en principe à rejeter une hypothèse qu'un texte contredit et à vérifier par les textes pris dans leur ensemble une conjecture suggérée par l'un d'entre eux. L'autre écueil réside dans la tendance à pratiquer d'un texte mathématique ancien une lecture qu'on pourrait qualifier de « logifiante », c'est-à-dire de tirer argument, pour ou contre telle ou telle interprétation, de tout écart du texte par rapport aux normes logiques modernes, et aux caractéristiques que l'on s'attend à trouver de nos jours dans une théorie axiomatisée. C'est un fait qu'une bonne partie des discussions qui s'élèvent actuellement entre spécialistes procède de l'une ou l'autre de ces deux tendances, agissant à partir d'un examen partiel du corpus des textes et d'une non-hiérarchisation de la valeur respective des divers types de sources. On saura donc gré à Bernard Vitrac d'avoir formulé ces principes, et surtout de les avoir suivis.

L'une des difficultés « globales » que présente le traitement de la proportionnalité par Euclide, c'est qu'il n'y a pas dans *Les Eléments* un traitement, mais deux : un pour les « grandeurs », l'autre pour les « nombres » (entiers); que ces deux traitements, distincts, dépendent de prémisses définitionnelles différentes, et qui ne se correspondent pas exactement; et qu'enfin dans les théorèmes où il est besoin de coordonner ces deux traitements, cela ne semble justement pas être fait de façon satisfaisante (théorèmes relatifs à l'incommensurabilité). Cet état de choses rend compte du fait que, depuis environ un siècle, la plupart des études portant sur la proportionnalité ont été conduites non pour elles-mêmes, mais dans le cadre de l'histoire de la découverte de l'incommensurabilité.

C'est ainsi qu'ont été proposées plusieurs « histoires » de la « théorie des proportions avant Euclide », auxquelles Bernard Vitrac a consacré un chapitre préliminaire. On trouvera là un dossier excellemment établi, qui permet de faire le point des thèses en présence avant tout nouvel examen. Successivement sont passées en revue : la thèse « traditionnelle » qui attribue à Eudoxe de Cnide une théorie « générale » des proportions, laquelle se retrouverait quasiment telle quelle dans le Livre V d'Euclide, et aurait été historiquement précédée de théories plus « particulières » (par exemple pour les « nombres »?); la thèse de Becker (1933) d'après laquelle l'algorithme dit « d'Euclide » aurait fourni avant Eudoxe une définition de la proportionnalité et servi de base à l'édifice théorique; la thèse récente de Knorr (1978) selon qui on trouverait dans des textes post-euclidiens des traces d'un traitement pré-euclidien dû à Eudoxe, consistant à réduire les cas de proportionnalité entre incommensurables au cas commensurable par passage à la limite au moyen d'un raisonnement indirect; enfin les critiques plus récentes de certains aspects des thèses précédentes, qui se fondent surtout sur des considérations logiques, parfois très sévères à l'égard... d'Euclide! (par exemple Gardies, 1988).

Après ce rappel utile de l'état actuel de la critique, la thèse de Bernard Vitrac, entamant l'analyse du texte, comporte une partie consacrée aux fondements de la proportionnalité, une étude extrêmement fine et détaillée de la manière dont les rapports sont manipulés ou utilisés, en eux-mêmes au Livre V, puis dans les Livres géométriques et dans les Livres arithmétiques des *Eléments*, ainsi que dans *Les Données,* enfin un retour critique sur l'histoire, soit antérieure à Euclide, soit postérieure, avec une enquête sur les situations où interviennent, dans les rapports, des temps ou des poids, et non plus seulement des grandeurs géométriques.

Dans l'analyse des fondements, Bernard Vitrac met en évidence ce qui sera l'un des acquis majeurs de sa thèse, à savoir le rôle qu'Euclide fait jouer à la notion de « multitude » *(πλῆθος).* Ce terme s'applique à une multitude toujours finie, mais indéterminée, qui peut s'entendre soit de grandeurs, soit de nombres, en particulier des parties d'une grandeur, des diviseurs d'un nombre, des termes d'une progression, etc. Les multitudes ont peu de propriétés, comme l'égalité, l'inégalité, la parité; elles sont antérieures au dénombrement, un nombre étant une multitude déterminée. Elles permettent de former les concepts d'équimultiples et d'équimultiplicité qui jouent un rôle central dans les définitions de la mise en rapport de deux grandeurs et de la proportionnalité (déf. V, 4 et 5). Grâce à ces notions il est possible de parler des grandeurs ou des nombres à un autre niveau que celui où s'expriment les propriétés objets de la Géométrie ou de l'Arithmétique. Le langage des multitudes constitue donc une sorte de métalangage permettant de formuler certains énoncés plus généraux communs aux nombres et aux grandeurs, considérés en tant que formant des collections, mais il est montré que ce langage n'est pas ensembliste. C'est lui qui permet d'assurer la coordination nécessaire au Livre X entre les rapports de grandeurs et les rapports de nombres, et de dire de façon cohérente que deux grandeurs ont (ou n'ont pas) un rapport de nombre à nombre. En effet, on peut considérer que le langage des multitudes contient les termes : unité, mesure, partie; or l'unité mesure tout nombre et tout nombre est une multitude d'unités; d'autre part si une grandeur en mesure une autre, elle en est une partie et la seconde est son multiple, si bien qu'elle est, à sa manière, une « multitude d'unités de mesure ». L'analogie est, à ce niveau, patente. Mais en même temps, bien entendu, les traits spécifiques des entiers, qui les distinguent des grandeurs, justifient suffisamment qu'un double traitement ait été maintenu par Euclide. Bernard Vitrac montre pertinemment comment les notions de ces deux sortes d'« objets » se sont formées dans la culture intellectuelle de la Grèce et ont reçu une élaboration épistémologique, dans le cadre notamment de l'opposition entre quantité discrète et quantité continue, qui interdisait de les confondre.

Cette étude des « objets » qui sont fondamentalement concernés par la proportionnalité permet de mettre en évidence une autre distinction capitale : celle qui est maintenue par Euclide entre les objets d'une part et de l'autre les relations qui s'instaurent entre eux. Selon les catégories de la pensée antique, une relation entre « objets » (ou « choses mathématiques ») ne saurait à son tour constituer un « objet » d'ordre supérieur; de plus les propriétés des relations ne sont pas complètement dégagées comme dans la théorie moderne. Cela est valable pour la notion de « rapport » *(λόγος)*, pivot de l'idée de proportionnalité. Il s'ensuit que la querelle qui agite les critiques sur la question de savoir si la notion de « rapport » a une présence et une importance mathématique au Livre V est mal engagée. Les rapports n'y figurent certes pas comme des « objets » soumis à un calcul complet; mais en tant que relations, ils y figurent bel et bien. Quant au statut relatif des notions de rapport et de proportion, là encore le problème est mal posé. La distinction entre relation à deux ou à quatre places est moderne et non pertinente. Euclide traite abondamment de relations à $2n$ places, où le même rapport se réitère pour plus de deux couples de termes. Le mot « proportion » lui-même *(ἀναλογία)* ne figure que localement dans un sens spécial ou dans des énoncés dont la datation post-euclidienne et l'origine tardive sont textuellement prouvées. Euclide s'exprime autrement : s'il envisage bien le rapport de deux termes, il énonce aussi que deux termes *ont le même* rapport que deux autres, ou que quatre (ou $2n$) termes *sont dans le même* rapport, ou encore sont *en proportion :* il est clair que ces expressions sont synonymes. L'objet propre du Livre V n'est donc à chercher ni dans une théorie des rapports, ni dans une théorie des proportions, mais dans une théorie de l'identité des rapports ou proportionnalité. Prise en elle-même, celle-ci est antérieure à la distinction des grandeurs commensurables et incommensurables. Les premières ont un rapport de nombre à nombre, et ceux-ci sont l'objet des Livres VII à IX; les deuxièmes ne l'ont pas : elles seront l'objet du Livre X.

Il n'y a pas à proprement parler d'opérations, au sens moderne du terme, sur les rapports. Il existe certaines manipulations réglées qui, à partir d'un rapport donné, permettent d'en déterminer d'autres, ce qui, en géométrie par exemple, reçoit des applications dignes d'intérêt. Il existe aussi des transformations portant sur deux couples de termes dans le même rapport (permutation des termes moyens) ou sur deux multitudes (de même parité) de termes ayant, deux à deux, même rapport dans l'une et dans l'autre (les termes pris dans chacune à égalité de rang sont en proportion). D'autre part les aires carrées (respectivement les volumes cubiques) sont dites *en rapport doublé* (respectivement *triplé*) des longueurs de leurs côtés; tandis que les aires des parallélogrammes équiangles sont dites *avoir le rapport composé* des rapports de leurs côtés; il semble ressortir de là qu'un rapport doublé est un rapport composé avec lui-même. Il est clair que l'interprétation de ces manipulations et propriétés pose maints problèmes qui ont divisé les commentateurs et dont Bernard Vitrac fournit une analyse minutieuse et prudente, toujours respectueuse du style propre à la mathématique ancienne, comparant les définitions avec l'emploi effectif des notions, et s'abstenant des identifications modernisantes. Nous ne pouvons entrer ici dans ces discussions, mais on aura compris qu'il n'est pas question à la suite de ces analyses d'identifier d'aucune façon le rapport de grandeurs euclidien au nombre réel des modernes, et pas davantage le rapport de nombres à un rationnel.

L'examen du Livre VI est l'un des plus instructifs de la thèse. On y constate l'économie réalisée par le « double traitement » des grandeurs et des nombres : seuls sont redémontrés les résultats qui doivent l'être et non ceux qui peuvent être utilisés analogiquement; par ailleurs les énonciations qui relèveraient du « métalangage » fondationnel des multitudes sont réduites au minimum; certaines facilités manipulatoires sont prohibées : par exemple le recours aux substitutions de rapports identiques, ou encore dans la composition des rapports, la « simplification » par élimination d'un même terme antécédent dans un rapport et conséquent dans l'autre. On peut conclure de ces analyses que les hypothèses de remaniements dont sont friands certains commentateurs sont inutiles. Mais ces précautions euclidiennes ne signifient pas que la théorie est à un stade embryonnaire; bien plutôt elles soulignent la spécificité du genre « éléments » qui s'interdit des raccourcis calculatoires relevant de la Logistique.

Il faut signaler aussi une importante précision apportée à la lecture du Livre VIII, dont certaines propositions étaient interprétées par tout un courant du commentaire depuis Zeuthen comme contenant des démonstrations d'irrationalité de racines *n*-ièmes. En fait les propositions VIII, 6 et 7 concernent l'existence dans les entiers de racines *n*-ièmes d'entiers. Mais ce résultat était-il perçu dans toute sa généralité? En revanche, dans le cas des propositions VIII, 9 et 10 qui, selon Zeuthen, concerneraient l'irrationalité de racines *n*-ièmes de « fractions », l'interprétation n'est pas recevable en raison de la défectuosité de VIII, 10 qui ne peut être considérée comme la converse de VIII, 9.

Dans sa dernière partie, la thèse met en garde contre la « surinterprétation » des « témoignages » d'Aristote : il n'est pas certain en effet que les remarques souvent citées du Stagirite sur la définition de la proportionnalité ou le théorème de permutation aient une signification historique plutôt qu'épistémologique. On ne peut d'autre part imaginer l'existence de « théories » pré-eudoxéennes en effectuant indûment le passage du simple usage d'un algorithme à l'idée d'une théorie *stricto sensu* fondée sur lui. Quant au traitement alternatif de la proportionnalité par séparation des cas commensurables et incommensurables, il s'explique, même après Euclide, par des raisons techniques : peut-on toujours prendre des équimultiples *quelconques* de deux angles, de deux durées, de deux poids, ou des deux bras du fléau d'une balance en Statique? A ce sujet l'examen des textes post-euclidiens (Archimède, Héron, etc.) permet de préciser en quel sens la théorie du Livre V des *Eléments* est générale. Elle l'est en ce qu'elle s'applique aux grandeurs géométriques selon les trois dimensions, indépendamment de leur forme et du caractère de commensurabilité. Elle ne l'est certainement pas parce que les « nombres » seraient une sous-classe des « grandeurs ». L'est-elle en ce qu'elle s'applique aux grandeurs « physiques »? Sur ce point seule une enquête portant sur d'autres textes peut apporter la réponse. Même si en droit la notion abstraite et relativement indéterminée, en tout cas non-définie, de « grandeur » paraît appropriée, des contraintes techniques peuvent déconseiller l'emploi de la théorie telle qu'elle est exposée dans *Les Eléments*.

Un des principaux résultats du travail de Bernard Vitrac concerne la manière de considérer *Les Eléments* eux-mêmes. Leur examen minutieux aboutit en quelque sorte à une réhabilitation de leur cohérence, mise à mal par les commentateurs qui y voient nombre de « résultats inutiles », « doublons », « traces de rédactions antérieures », échecs à réunifier des « sources initialement distinctes », et autres difficultés. Sans doute certaines particularités que nous n'avons pas eu la place d'évoquer ici, comme l'absence de recours à la proportionnalité dans les quatre premiers Livres, sont-elles réelles. Mais au total *Les Eléments* apparaissent comme le résultat d'un travail subtil d'harmonisation des acquis antérieurs, au point que ceux-ci ne sont plus directement lisibles dans la rédaction euclidienne, contrairement à ce qu'on a souvent cru. Il n'est plus question d'attribuer globalement tel Livre aux Pythagoriciens, tel autre à Archytas, tel autre à Eudoxe, tel autre à Théétète, ou de soutenir que dans les Livres I à IV, ou le Livre VII, on a affaire à des « rédactions anciennes ». La contribution d'Euclide lui-même dans la rédaction qui nous est parvenue sous son nom est bien plus considérable qu'on ne l'a cru. Et tout compte fait, le travail d'unification des notions, des méthodes et des domaines effectué sur la question de la proportionnalité est une réussite, ce qu'on ne peut dire avec autant d'assurance pour des notions comme l'égalité ou la similitude.

Il en résulte que la plupart des reconstructions « archéologiques » des antécédents historiques sont inutiles, non pas du point de vue de la simple enquête historique, mais comme moyens de rendre compte de prétendues défaillances euclidiennes. Le texte d'Euclide dit finalement très peu de choses sur ses prédécesseurs : il est historiquement opaque, parce que substituant aux méandres de l'histoire sa propre cohérence. Celle-ci procède de la nature même du genre littéraire appelé « éléments » et du style mathématique qui y est de mise. Il s'agit d'un genre dont l'intention pédagogique n'est pas absente, mais doit s'entendre au sens le plus élevé : ouvrir l'accès à une épistémologie des fondements. D'où le caractère normatif d'un tel traité, tant en ce qui concerne le choix des contenus jugés essentiels et des résultats avérés, le canon de l'exposition qui est la démonstration synthétique, l'ordre d'apparition et d'enchaînement des notions, l'économie des moyens. Une analyse de ce style mathématique est susceptible de rendre compte des particularités du traité, autant et mieux que des spéculations sur des théories antérieures conjecturales.

La thèse de Bernard Vitrac s'achève donc sur une note aporétique en ce qui concerne l'interprétation de tous les témoignages — fragmentaires, disparates et succincts — qui nous sont parvenus sur la proportionnalité avant Euclide. Nous ne savons guère comment les auteurs d'*Eléments*, ses devanciers, astreints aux mêmes exigences du genre que lui, s'y prenaient pour présenter des connaissances dont nous ignorons, pour leurs époques, les limites exactes. Les questions demeurent nombreuses, si l'on songe aux domaines autres qu'Arithmétique ou Géométrie, comme la « Musique » ou l'Astronomie, où les rapports intervenaient bien avant l'Alexandrin. Un travail de recherche qui compte est celui qui transforme les questions que pose un domaine, résolvant les anciennes et en formulant de nouvelles. C'est indéniablement le cas de la présente thèse de doctorat, qui du même coup renouvelle dans le détail la compréhension de la démarche de pensée des anciens mathématiciens. Toute étude en la matière devra désormais en tenir compte.

Directeur de recherche Maurice CAVEING.
(hon.) au CNRS,
UPR 21
27, rue Damesme
75013 PARIS